CONCOURS 1980

OPTIONS M et P'

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

DURÉE : 4 heures

I

Pour tout nombre réel t, on note F_t la fonction de la variable réelle x définie par

$$F_t(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + x^2}}.$$

1° *a.* t étant fixé, montrer qu'il existe une unique suite de nombres réels, $L_0(t), \ldots, L_n(t), \ldots$, telle que l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une égalité de la forme :

$$F_t(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(t)\, x^k + x^n \varepsilon_n(t, x),$$

$\varepsilon_n(t, x)$ tendant vers 0 quand x tend vers 0.

b. Calculer $L_n(1)$, $L_n(-1)$ et $L_n(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

c. Établir que

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k (2n - 2k)!\, t^{n-2k}}{2^n\, k!\, (n-k)!\, (n-2k)!},$$

où l'on note m la partie entière de $\frac{n}{2}$.

2° *a.* Démontrer que $L_n(t) = \frac{1}{2^n n!}((t^2 - 1)^n)^{(n)}$, le symbole $^{(n)}$ désignant la dérivée n-ième.

b. Établir que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$(n+1) L_{n+1}(t) - (2n+1)\, t\, L_n(t) + n L_{n-1}(t) = 0.$$

3° Démontrer que toutes les racines du polynôme L_n sont réelles, simples, et situées dans $]-1,1[$ (on pourra appliquer plusieurs fois le théorème de Rolle).

4° *a.* Lorsque $|t| \geqslant 1$, montrer que

$$L_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t + \sqrt{t^2 - 1} \cos\theta)^n\, d\theta$$

(on pourra mettre $t + \sqrt{t^2 - 1}\cos\theta$ sous la forme $(a + be^{i\theta})(a + be^{-i\theta})$). En déduire que

$$L_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(t + \sqrt{t^2 - 1}\cos\varphi)^{n+1}}.$$

b. On suppose maintenant $|t| \leqslant 1$ et on note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$; montrer que

$$L_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t + i\sqrt{1 - t^2}\cos\theta)^n\, d\theta$$

et que $|L_n(t)| \leqslant 1$ pour tout $t \in [-1, 1]$.

II

On conserve les notations de I et on note (e) l'équation différentielle

$$(1 - t^2)\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt} + n(n+1)y = 0.$$

1° Établir que la fonction $L_n(t)$ est solution de (e) pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2° Pour tout réel t vérifiant $|t| > 1$, on pose

$$Q_n(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_n(u)\frac{du}{t - u}.$$

a. Montrer que Q_n n'est pas une fonction polynomiale (on pourra d'abord vérifier que la fonction $Q_n\left(\frac{1}{t}\right)$ est développable en série entière au voisinage de 0).

b. Établir que

$$Q_n(t) = \frac{1}{2^{n+1}}\int_{-1}^{1} \frac{(1 - u^2)^n}{(t - u)^{n+1}}\, du$$

et en déduire que, si $t > 1$, on a

$$Q_n(t) = \int_0^{+\infty} \frac{d\theta}{(t + \sqrt{t^2 - 1}\,\mathrm{ch}\,\theta)^{n+1}}$$

$\left(\text{on pourra utiliser un changement de variable du type } u = \dfrac{ae^\theta - b}{ae^\theta + b}\right)$.

3° *a*. Montrer que, sur chacun des deux intervalles $I_- =]-\infty, -1[$ et $I_+ =]1, +\infty[$, la fonction Q_n est indéfiniment dérivable et solution de (*e*).

b. Pour tout $t \in I_- \cup I_+$, on pose $W(t) = L_n(t)\,Q'_n(t) - L'_n(t)\,Q_n(t)$; vérifier que

$$(1 - t^2)\frac{dW}{dt} - 2tW = 0$$

et montrer que $W(t) \neq 0$ pour tout $t \in I_- \cup I_+$. Établir que toute fonction f, solution de (*e*) sur I_- (resp. sur I_+) s'écrit, de manière unique, sous la forme

$$f = \lambda_- L_n + \mu_- Q_n \text{ (resp. } \lambda_+ L_n + \mu_+ Q_n),$$

λ_- et μ_- (resp. λ_+ et μ_+) étant des constantes. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables sur $I_- \cup I_+$ et qui vérifient (*e*) sur $I_- \cup I_+$?

III

On note E l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables sur $[-1,1]$ et à valeurs réelles; pour tous f et g appartenant à E, on pose

$$f \mid g = \int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,dt, \quad \|f\| = \sqrt{f \mid f};$$

$N(f)$ désigne la borne supérieure de la fonction $|f(t)|$ sur $[-1,1]$.

E' est le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, E'_n celui formé de la fonction nulle et des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

On admettra que E' est N-dense dans E, c'est-à-dire que, pour tout $f \in E$ et tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un élément P de E' tel que $N(f - P) < \varepsilon$.

1° *a*. Vérifier que $\|f\| \leqslant \sqrt{2}\,N(f)$ pour tout $f \in E$ et que, si l'on a de plus

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(k-1)}(0) = 0,$$

alors $N(f) \leqslant \dfrac{1}{k!} N(f^{(k)})$.

b. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f \mid L_n = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f^{(n)}(t)\,(1 - t^2)^n\,dt.$$

2° *a*. Soient p et q deux entiers naturels distincts; calculer $L_p \mid L_q$ et $\|L_p\|$.

b. Montrer que, pour tout $P \in E'_n$, il existe une unique famille de réels $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ telle que $P = \lambda_0 L_0 + \ldots + \lambda_n L_n$. Exprimer les λ_k en fonction de P et des L_k, calculer λ_n dans le cas particulier où P est la fonction t^n.

3° Soit $f \in E$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\left(k + \frac{1}{2}\right)(f \mid L_k)\,L_k(t).$$

a. Établir que

$$\|f\|^2 = \|f - f_n\|^2 + \|f_n\|^2;$$

en déduire que la série de terme général $\left(k + \dfrac{1}{2}\right)(f \mid L_k)^2$ est convergente et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(k + \frac{1}{2}\right)(f \mid L_k)^2 \leqslant \|f\|^2.$$

b. Démontrer que

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(k + \frac{1}{2}\right)(f \mid L_k)^2$$

(on pourra d'abord montrer que $\|f - P\| \geqslant \|f - f_n\|$ pour tout $P \in E'_n$, puis utiliser la N-densité de E').

IV

On fixe désormais $n \geqslant 1$ et on note $x_1, \ldots, x_n$ les racines de L_n, rangées par ordre croissant.

1° Établir qu'il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ uniques tels que l'égalité

$$\int_{-1}^{1} P(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k P(x_k)$$

soit vérifiée pour tout $P \in E'_{2n-1}$. On posera, pour tout $f \in E$,

$$\delta(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k).$$

2° On suppose, dans cette questien, que f est de la forme $f(t) = (L_n(t))^2 P(t)$, P étant un élément de E';

a. Soit t_0 un élément quelconque de $[-1, 1]$; on note Δ la fonction définie par

$$\Delta(t) = f(t) - (L_n(t))^2\, P(t_0).$$

Démontrer qu'il existe un $\xi \in]-1, 1[$ tel que $\Delta^{(2n)}(\xi) = 0$.

b. En déduire que, si on pose

$$k_n = \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!\,(C_{2n}^n)^2},$$

on a

$$|\delta(f)| \leqslant k_n N(f^{(2n)}),$$

relation que l'on notera (*r*).

3° *a*. Établir que (*r*) est vraie pour tout $f \in E'$.

b. Démontrer que (*r*) est vraie pour tout $f \in E$ (on pourra commencer par montrer que, si $f \in E$ et si ε est un réel > 0, il existe un $g \in E'$ tel que tous les nombres $N(f-g)$, $N(f'-g')$, ..., $N(f^{(2n)} - g^{(2n)})$ soient strictement inférieurs à ε).

4° On suppose, dans cette question, que $n = 4$.

a. Expliciter L_4 et x_1, x_2, x_3, x_4.

b. Calculer les valeurs exactes de α_1, α_2, α_3, α_4, celle de $\frac{1}{k_4}$ et écrire la forme explicite que prend, pour $n = 4$, la relation (*r*).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail